

Problem Bank for Calculus (Jan. 2024)

Textbook: 미적분학-기초부터 응용까지 2ed, 한빛아카데미

Problem 1. $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 임을 증명하라.

Problem 2. 조임정리를 이용하여 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$ 의 값을 구하여라.

Problem 3. f 가 $[0, 1]$ 에서 연속이고 $0 \leq f(x) \leq 1$ 이면 $f(c) = c$ 를 만족하는 c 가 $[0, 1]$ 에 존재함을 보여라.

Problem 4. 중간값 정리를 이용하여 함수 $f(x) = x^4 + x - 3$ 이 폐구간 $[1, 2]$ 에서 근이 존재함을 보이고, 이 구간 $[1, 2]$ 내에서 근을 포함하는 부분 중에서 구간의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 부분구간을 구하여라.

Problem 5. $a = x - b \sin x$ ($a > 0, 0 < b < 1$) 일 때, 방정식의 실근의 개수가 몇 개인지를 조사하고, 실근이 속하는 구간을 구하여라.

Problem 6. $f(x) = \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$ 일 때 $f(c) = c$ 인 적당한 c 가 0과 1사이에 존재함을 보여라.

Problem 7. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10} \in [0, 2]$ 일 때, $\frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} |x - x_k| = 1$ 을 만족하는 x 가 개구간 $(0, 2)$ 안에 존재함을 증명하여라.(단, $\frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} x_k \neq 1$ 이다.)

Problem 8. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ ($n \geq 3$ 인 자연수) 일 때 $x = 0$ 에서 $f'(x)$ 의 연속성을 조사하시오.

Problem 9. 함수 $f(x) = 3 + x + \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $(-1 < x < 1)$ 일 때, 역함수가 존재함을 보이고, $(f^{-1})'(3)$ 을 구하여라.

Problem 10. 다음 극한값을 구하여라.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 8x)^{\frac{8}{x}}$$

Problem 11. 임의의 실수 u 와 v 에 대하여, $|\cos u - \cos v| \leq |u - v|$ 임을 보여라.

Problem 12. $\cos(xy) = 1 + \sin 4y$ 에 대하여, $\frac{dy}{dx}$ 를 구하여라.

Problem 13. $f(x) = \frac{e^{-3x}}{x^2 + 1}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $x = -1$ 에서 $g(x)$ 의 접선의 방정식을 구하여라.

Problem 14. 처음 반지름의 길이가 20cm 인 구 모양의 풍선에 공기를 넣어, 매초 1cm 씩 반지름의 길이가 커지고 있다. 10초 후의 풍선의 (1) 겉넓이의 변화율과 (2) 부피의 변화율을 구하여라.

Problem 15. 함수 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{7+2t^2} dt$ 이고, 함수 $g(y) = \int_3^y f(x) dx$ 일 때, $g''\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 를 구하여라.

Problem 16. $\int_0^\infty e^{-x^2} dx < 1 + \frac{1}{2e}$ 을 증명하여라.

Problem 17. $\int \frac{1}{1-2\sin x} dx$ 를 구하여라.

Problem 18. $\int \csc^3 x dx$ 를 구하여라.

Problem 19. $\int_0^1 x^4 \sqrt{2-x^2} dx$ 를 구하여라.

Problem 20. $\int_{-\infty}^\infty x \sin(x^2) dx$ 의 수렴여부를 판단하여라.

Problem 21. 미적분학의 기본정리를 이용하여 $f(x) = \int_{x^3}^{\sqrt{x}} \tan^{-1} s ds$ 일 때 $f(x)$ 의 도함수를 구하여라.

Problem 22. 자연수 n 에 대하여 $S_n = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\}^{\frac{1}{n}}$ 일 때 정적분의 정의를 이용하여 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 을 구하시오.

Problem 23. 멱급수 $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{\ln(n+1)}$ 의 수렴구간을 구하시오.

Problem 24. 다음 급수의 수렴 또는 발산을 판정하시오.

$$(1) \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$(2) \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n^2 + 1} \right)$$

$$(3) \sum_{n=1}^\infty \frac{5n^2 + n - 2}{\sqrt[4]{n^{10} + n^6 + 3}}$$

$$(4) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{2^n}$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

Problem 25. (1) 함수 $f(x) = \sin x$ 의 매클로린급수를 구하시오.

(2) 함수 $f(x) = \sin x$ 의 매클로린급수가 모든 실수 x 에 대하여 $\sin x$ 에 수렴함을 보이시오.

Problem 26. 다음 적분을 구하시오.

$$(1) \int \frac{2-x}{x^3-1} dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{1}{2}} 2x \sec(\sin^{-1} x - \cos^{-1} x) dx$$

Problem 27. 함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan^2 x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 일 때

(1) 함수 f 가 $x = 0$ 에서 연속임을 보이고, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $xf(x) = \tan^2 x$ 임을 보이시오.

(2) $f(x)$ 와 x 축, $x = \frac{\pi}{4}$ 로 둘러싸인 부분을 y 축에 대하여 회전시켜 얻은 회전체의 부피를 구하시오.

Problem 28. 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$ 의 수렴반경과 수렴구간을 구하여라.

Problem 29. 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{n+1}}{n\sqrt{n+1}}$ 의 수렴구간과 수렴반지름을 구하여라.

(주의: 풀이에 사용된 판정법을 명시하여라.)

Problem 30. 곡선 $y = \frac{1}{x+x^3}$, x -축, $x = 1$, $x = \sqrt{3}$ 으로 둘러싸인 영역을 $x = -5$ 를 회전축으로 하여 회전시켰을 때 생기는 입체의 부피를 구하여라.

Problem 31. $f(x) = e^x$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $x = -1$ 에서의 $f(x) = e^x$ 의 Taylor 급수를 구하여라.

(2) 위의 급수가 $f(x) = e^x$ 로 수렴함을 보여라.

Problem 32. 곡선 $C : r(t) = \cos t i - \sin t j + t k$ 위의 점 $r(\frac{\pi}{4})$ 에서의 접축평면의 방정식을 구하여라. (10점)

Problem 33. 곡선 $r = \pm \frac{6}{\sqrt{4 + 5 \sin^2 \theta}}$ 의 내부와 $r = 2 \cos \theta$ 외부의 공통 영역을 표시하고, 공통 영역의 넓이를 구하시오. (모든 영역의 넓이를 매개변수 방정식을 이용하여 구하시오.)

Problem 34. 곡선 $\begin{cases} x = 2 \cos t + \cos 2t \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (1) $t = \frac{\pi}{4}$ 에서 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 을 구하시오.
- (2) $0 \leq t \leq 2\pi$ 까지 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

Problem 35. 두 개의 평행한 직선 $l_1 : x = 1 + 2t, y = 3 - t, z = -1 + 3t$ 와 $l_2 : x = 2t, y = 4 - t, z = 2 + 3t$ 를 포함하는 평면의 방정식을 구하여라.

Problem 36. 곡선 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

- (1) 곡선을 매개변수 방정식으로 표현하여라.
- (2) (1)을 이용하여, 곡선으로 만들어지는 영역의 넓이를 구하여라.
- (3) (1)을 이용하여, 곡선 위의 점 $\left(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 에서 접선의 방정식을 구하여라.

Problem 37. 벡터 $u = \langle 1, -2, 3 \rangle$ 에 대하여, $v = \langle 1, 2, 2 \rangle$ 방향에 대한 u 의 성분 $P_v^r(u)$ 을 구하고, 벡터 u 를 $P_v^r(u)$ 와 $P_v^r(u)$ 에 수직인 벡터 u_0 의 합으로 나타내어라.

Problem 38. 밀도함수 $p(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ 이고 꼭짓점 $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ 을 가지는 얇은 사각막의 질량과 질량중심을 구하여라.

Problem 39. 다음 물음에 답하여라.

- (1) 위치벡터 $r(t) = \langle t, \frac{1}{2}t^2 \rangle$ 인 곡선의 곡률벡터를 구하여라. $(-\infty < t < \infty)$
- (2) $y = \frac{1}{2}x^2$ 위의 점 $(1, \frac{1}{2})$ 에서의 곡률과 곡률원의 반지름을 구하여라.

Problem 40. 곡선 $r(t) = \langle t, \sqrt{2} \ln t, \frac{1}{t} \rangle$ 의 점 $(1, 0, 1)$ 에서 다음을 구하여라.

- (1) 단위접선벡터 T 를 구하여라.
- (2) 단위법선벡터 N 을 구하여라.
- (3) 종법선벡터 B 를 구하여라.
- (4) 곡률 K 를 구하여라.

Problem 41. 공간의 적당한 영역에 걸쳐 전위 V 가 $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$ 로 주어졌을 때 다음을 구하여라.

- (1) 점 $P(3, 4, 5)$ 에서 벡터 $v = i + j - k$ 방향으로 전위의 변화율을 구하여라.
- (2) 점 $P(3, 4, 5)$ 에서 어느 방향으로 전위 V 가 가장 빨리 변하는지 구하시오.
- (3) 점 $P(3, 4, 5)$ 에서 전위 V 의 최대 변화율을 구하시오.

Problem 42. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 상에서 함수 $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ 의 최댓값과 최솟값을 라그랑주 승수를 이용하여 구하여라.

Problem 43. 함수 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 4x^2 + 2y^2}{2x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ A & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 가 점 $(0, 0)$ 에서 연속일 때, A 의 값을 구하여라.

Problem 44. z 가 $F(x, y, z) = x^3 e^{y+z} - y \sin(x - z) = 0$ 에 의해 x 와 y 의 음함수로 정의된다고 하자. 점 $(\pi, 0, 2\pi)$ 에서 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 의 값을 구하여라.

Problem 45. 이변수 함수 $f(x, y) = e^{x-y} \cos y + e^{y-x} \cos x$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

- (1) 점 $P(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ 에서 점 $O(0, 0)$ 방향으로의 함수 f 의 방향도함수를 구하여라.
- (2) f 가 점 $P(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ 에서 최대변화율을 갖을 때 증가율을 구하여라.

Problem 46. 영역 $R = \{(x, y) | x^2 + 4y^2 \leq 24\}$ 에서 함수 $f(x, y) = x^2 + 2x + y^2$ 에 대하여 다음을 구하여라.

- (1) 영역의 내부에서 2계도함수 판정법을 이용하여 극값을 구하여라.
- (2) 영역 R 경계에서 함수 $f(x, y)$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.
- (3) 위의 (1)과 (2)에서 구한 값 중에서 최댓값과 최솟값을 구하여라.

Problem 47. $x = rse^t, y = rs^2e^{-t}, z = r^2s \sin t$ 이고, $u = x^4y + y^2z^3$ 이다. $r = 2, s = 1, t = 0$ 일 때 $\frac{\partial u}{\partial s}$ 의 값을 구하여라.

Problem 48. 곡선 $C : x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = t$ 에 대하여 다음을 구하여라.

- (1) 곡선 C 의 단위접선벡터를 구하여라.
- (2) 곡선 C 위의 점 $t = \frac{\pi}{4}$ 에서 접선의 방정식을 구하여라.

Problem 49. 극한 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2$ 이 존재하지 않음을 보여라.

Problem 50. 타원면 $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ 에 대한 점 $(-2, 1, -3)$ 에서의 접평면과 법선의 방정식을 구하여라.

Problem 51. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$ 에서 함수 $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

Problem 52. 극한값이 존재하는지 판별하고 존재한다면 그 값을 구하여라.

(1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

(2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Problem 53. 고체의 직원기둥이 열을 받으면, 그것의 반지름 r 과 높이 h 가 증가한다. 따라서 이것의 겉넓이 S 도 증가한다. $r = 10\text{cm}$ 이고 $h = 100\text{cm}$ 일 때, r 은 시간당 0.2cm 증가하고 h 는 시간당 0.5cm 증가한다고 하자. S 는 이 순간에 얼마나 빨리 증가하는가?

Problem 54.

(1) $3e^{xyz} - 4xz^2 + x \cos y = 2$ 일 때 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 을 구하여라.

(2) 미분 가능한 함수 f 에 대하여 $z = f(\ln x + \frac{1}{y})$ 일 때 $x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y^2 \frac{\partial z}{\partial y}$ 를 구하여라.

Problem 55.

(1) 점 $(1, 1)$ 에서 함수 $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ 의 방향도함수가 0이 되는 방향을 구하여라.

(2) 곡면 $e^{x-1}y^2 + z^3 = 12$ 위의 점 $(1, 2, 2)$ 에서 접평면의 방정식과 법선방정식을 구하여라.

Problem 56. 영역 $S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$ 상에서 $f(x, y) = \cos x + \cos y + \cos(x + y)$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

Problem 57. $a > 0$ 일때 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$ 를 계산하여라.

Problem 58. 곡선 $y = x^2$ 과 $y^2 = 8x$ 로 둘러싸인 영역을 x 축을 회전축으로 회전시켰을 때 생기는 입체의 부피를 구하시오.

Problem 59. 기하급수 $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ 은 $|r| < 1$ 이면 $S = \frac{a}{1-r}$ 로 수렴하고, $|r| \geq 1$ 이면 발산함을 보여라.

Problem 60. 매개변수 방정식 $x = t + e^t, y = 2t + \cosh t$ ($-\infty < t < \infty$)로부터 $\frac{dy}{dx}$ 와 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 를 구하시오.

Problem 61. 위치벡터가 $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)로 주어진 곡선의 곡률벡터와 곡률의 최댓값, 최솟값을 구하여라.

Problem 62. 함수 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\tan(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 에서 대하여 $f(x, y)$ 가 점 $(0, 0)$ 에서 미분가능함을 보이려고 한다. 다음 물음에 답하여라.

- (1) $f_x(0, 0)$ 과 $f_y(0, 0)$ 을 구하여라.
- (2) z 의 증분 Δz 를 구하여라.
- (3) (1)와 (2)를 이용하여 $f(x, y)$ 가 점 $(0, 0)$ 에서 미분가능함을 보여라.

Problem 63. $r^2 = 4 \cos 2\theta$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라.

Problem 64. 영역 $D = \{(x, y) : x > 0, y \geq 0, b^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2\}$ ($a, b > 0$) 에서 이중적분

$$\iint_D \tan^{-1} \frac{y}{x} dA \quad (x \neq 0)$$

을 구하여라.

Problem 65.

$$\int_{-2}^0 \int_{x^2}^4 f(x, y) dy dx + \int_0^4 \int_x^4 f(x, y) dy dx$$

의 적분순서를 바꾸어서 간단히 정리하여라.

Problem 66.

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4 + 1} dy dx$$

을 구하여라.

Problem 67. 이상적분 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ 를 구하여라.

Problem 68. 이중적분을 이용하여 평면 $3x + 6y + 3z = 12$ 와 세 좌표평면으로 둘러싸인 사면체의 부피를 구하여라.

Problem 69. 극좌표계에 대한 이중적분

$$\iint_D e^{-r^2 \cos^2 \theta} r dr d\theta$$

을 직교좌표계로 고친 이후에 적분값을 구하라. (여기서 영역 $D = \{(r, \theta) : \frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq -2 \sec \theta\}$ 이다.)

Problem 70. xy 평면 위의 포물면 $z = 4 - x^2 - y^2$ 과 원기둥 $x^2 + y^2 = 2x$ 으로 이루어진 입체 Q 의 부피를 구하라.

Problem 71. R 은 직선 $x - 2y = 0$, $x - 2y = -4$, $x + y = 4$, $x + y = 1$ 로 둘러싸인 영역이다. 다음 이중적분 $\iint_R 3xy \, dA$ 를 구하여라.

Problem 72. $x^2 + y^2 \leq 9$ 인 영역에서 반구면 $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ 의 부분 곡면의 넓이를 구하여라.

Problem 73. 원기둥 $x^2 + y^2 = 2y$ 안에 속하는 원뿔 $z^2 = x^2 + y^2$ 의 넓이를 구하여라.

Problem 74. 영역 R 이 네 점 $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ 을 꼭짓점으로 갖는 정사각형 영역일 때

$$\iint_R (x - y)^2 \cos^2(x + y) dA$$

을 변수변환을 이용하여 구하여라.

Problem 75.

(1) $\int_0^{2a} \left\{ \int_{\frac{x^2}{4a}}^{3a-x} 2dy \right\} dx (a > 0)$ 를 적분 순서를 바꾸어 계산하여라.

(2) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \cos(y^3) dy dx$ 을 계산하여라.

Problem 76. 곡면 S 가 $y^2 + z^2 = 9$ 을 두 평면 $x = 0$, $x = 4$ 로 자른 제1팔분공간에 놓인 부분일 때, $\iint_S (x + z) dS$ 를 곡면의 매개변수를 이용하여 구하여라.

Problem 77. 곡면 G 는 $2x - y + z = 3$ 의 부분이며 xy 평면의 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ 로 둘러싸인 영역 R 위에 놓인 영역일 때, $\iint_G (xy + z) dS$ 를 구하여라.

Problem 78. 원기둥 $x^2 + y^2 = 2y$ 의 내부, xy -평면의 위, 평면 $z = 2$ 의 아래로 이루어진 입체의 부피를 구하여라.

Problem 79. 삼중적분 $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_{y^3}^1 \cos \frac{z-1}{2} dz dy dx$ 를 구하여라. (10점)

Problem 80. 곡선 C 가 점 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형을 반시계 방향으로 돌 때, 다음 선적분을 하여라.

$$\int_C (9y + e^x) dx + (6x^2 + \sin y) dy$$

Problem 81. 선적분

$$\int_{(0,2,0)}^{(2,3,\sqrt{3})} \frac{xdx + ydy + zdz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

을 구하여라.

Problem 82. 시작점이 $(1, 0, 0)$ 이고 끝점이 $(-1, 0, 3\pi)$ 인 원나선의 방정식 $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$ 를 따라 운동하는 입자에 작용하는 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle -\frac{1}{2}x, -\frac{1}{2}y, \frac{1}{4} \rangle$ 이 한 일을 구하여라.

Problem 83.

- (1) 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2z + 2xz^2)\mathbf{i} + 2xyz\mathbf{j} + (xy^2 + 2x^2z)\mathbf{k}$ 에 대하여 $\mathbf{F} = \nabla f$ 를 만족하는 함수 f 를 구하고,
- (2) (1)을 이용하여 곡선 $C: x = \sqrt{t}, y = t + 1, z = t^2, 0 \leq t \leq 1$ 에 대한 선적분 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 을 구하여라.

Problem 84. 벡터장 $\mathbf{F}(x, y) = (4x^3 + 9x^2y^2)\mathbf{i} + (6x^3y + 6y^5)\mathbf{j}$ 이고 곡선 C 가 점 $(0, 0)$ 에서 점 $(1, 2)$ 까지의 임의의 경로라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

- (1) 벡터장 $\mathbf{F}$ 가 보존적임을 보여라.
- (2) 벡터장 $\mathbf{F}$ 의 위치함수 f 를 구하여라.
- (3) $\int_C \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r}$ 를 구하여라.

Problem 85. 곡선 C 는 원점을 둘러싸고 있는 임의의 단순폐곡선이고, 곡선 C 에 둘러싸인 영역 R 의 넓이가 3이다. 이 때

$$\oint_C \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - y \right) dx + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + x \right) dy$$

을 구하여라.

Problem 86. 그린정리를 이용하여

$$\oint_C \frac{-(y-1)}{4x^2 + (y-1)^2} dx + \frac{x}{4x^2 + (y-1)^2} dy$$

를 구하여라. 단, 곡선 C 는 $x^2 + y^2 = 16$ 이다.

Problem 87. 곡선 C 는 중심이 원점이고 반지름이 1인 원이다. 이 때 선적분

$$\oint_C \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 2y \right) dx + \left(2x - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy$$

을 반드시 그린정리를 이용하여 구하여라.

Problem 88. 타원 포물면 $z = x^2 + 4y^2$ 의 $z = 4$ 아랫부분(법선벡터의 방향은 위쪽)에서 $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle y, -x, yz \rangle$ 의 회전의 유출량을 구하여라.

Problem 89. 입체 S 가 구면 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ 아래와 원뿔면 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 위로 둘러싸인 폐유계 영역이고 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle \cos(y^2), e^{xz^2}, 6z^2 \rangle$ 일 때 $\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ 를 구하여라.

Problem 90. 입체 Q 가 좌표평면과 평면 $x + y + z = 2$ 으로 둘러싸인 제1팔분공간의 입체이다. 발산정리를 이용하여 벡터장 $\vec{F} = \langle x, y, z \rangle$ 에 대하여 $\iint_{\partial Q} \vec{F} \cdot \vec{n} ds$ 를 구하여라.

Problem 91. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ 중 평면 $z = 4$ 의 위에 있는 구면 G 을 통과하는 벡터장 $\vec{F} = \langle xz, yz, xy \rangle$ 의 바깥쪽 방향으로의 유율을 구하여라. (10점)

Problem 92.

- (1) 그릇의 모양이 포물면 $z = 2(x^2 + y^2)$ 형태이다. 그릇을 이용하여 강우량을 측정하고자 한다. 그릇의 바닥으로부터 높이가 4만큼 물이 찼을 때 강우량을 구하여라.
- (2) 곡면 G 를 통과하는 벡터장 $F(x, y, z) = \langle x, y, 0 \rangle$ 의 유율을 구하여라. G 는 $z = x^2 + y^2$ 중 평면 $z = 3$ 아래에 있는 부분이고 단위법선벡터 $\vec{n}$ 의 방향은 양의 z 축 방향이다.

Problem 93. 곡면 S 는 포물면 $z = 4 - x^2 - y^2$ 의 xy 평면 위쪽이고 단위 법선벡터는 포물선 바깥쪽을 향하고 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle e^{z^2}, 4x - y, 8 \sin(y^2 + 3y + 1) \rangle$ 일 때, $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ 을 구하여라.

Problem 94. 곡면 S 는 $0 \leq x^2 + z^2 \leq 1$ 위에 정사영시킨 포물면 $y = 1 - x^2 - z^2$ 의 일부분일 때, $\iint_S (x^2 + z^2) dS$ 를 계산하라.

Problem 95. 원기둥면 $x^2 + y^2 = 9$ 에서 $0 \leq z \leq 2$ 를 만족하는 부분을 S_1 라 하고, 원기둥 $x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 2$ 의 윗면을 S_2 라 하자. $S = S_1 \cup S_2$ 로 정의할 때, 면적분 $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$ 를 구하여라.

Problem 96. 곡면 S 는 포물기둥 $4y^2 + z = 16$ 중 평면 $x = 0, x = 1, z = 0$ 으로 둘러싸인 부분이고 $\mathbf{n}$ 이 포물기둥의 위로 향하는 단위법선벡터일 때 곡면 S 를 통과하는 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle yz, x, -z^2 \rangle$ 의 유량을 구하여라.

Problem 97. 스토크스(Stokes) 정리를 이용하여 $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$ 를 구하여라. (곡면 S 는 xy 평면 위에 놓여 있는 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 중에서 원기둥 $x^2 + y^2 = 2$ 에 의해 잘려진 안쪽 부분이고 $\mathbf{n}$ 은 위로 향하고 벡터장은 $\mathbf{F} = \langle y, z, x \rangle$ 이다.)

Problem 98. 입체 Q 가 $z = x^2 + y^2$ 와 $z = 8 - x^2 - y^2$ 으로 둘러싸인 부분이고, 벡터장 $\mathbf{F} = \langle 3y^2, 4x^3, 2z - x^2 \rangle$ 이다. 이 때 ∂Q 에서의 $\mathbf{F}$ 의 유출량을 구하라.

Problem 99. 벡터장 $\mathbf{F} = \langle z, x, y \rangle$ 에 대하여 $\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 을 스톡스정리를 이용하여 구하여라. (S 는 제1팔분공간의 평면 $2x + y + 2z = 6$ 이고, $\mathbf{n}$ 은 위쪽을 향하도록 택한다.)

Problem 100. S 가 통통한 구면 $x^8 + y^8 + z^8 = 8$ 일 때, S 를 통과하는 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle x^2 \sin y, x \cos y, -xz \sin y \rangle$ 의 유출량을 발산정리를 이용하여 구하여라.